Der Schur-Multiplikator in der algebraischen Zahlentheorie

Opolka, Hans

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.189-195

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Der Schur-Multiplikator in der algebraischen Zahlentheorie

Von **Hans Opolka**, Münster

1. Einleitung

Ein hauptsächlich auf Tate zurückgehendes Resultat besagt, daß der Schur-Multiplikator der absoluten Galoisgruppe eines lokalen oder globalen Zahlkörpers k verschwindet. Es soll über einige Folgerungen aus diesem Satz berichtet werden. Die Hauptpunkte sind: Beschreibung der Geschlechter von zentralen Erweiterungen einer gegegebenen endlichen Galoiserweiterung K/k, eine Verallgemeinerung des Hasseschen Normensatzes, Geschlechtertheorie für die Darstellungen der absoluten Galoisgruppe von k. Gleichzeitig wird auf Literatur hingewiesen, die mit diesen Themenkreisen mehr oder weniger eng zusammenhängt.

2. Bezeichnungen

U sei die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Für eine topologische Gruppe C bezeichne $\hat{C}$ die Gruppe der stetigen Homomorphismen von C mit Werten in U. Ist $\mathfrak{g}$ eine proendliche Gruppe, so sei $M(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g},U)$ die zweite Kohomologiegruppe von $\mathfrak{g}$ in bezug auf den diskreten trivialen $\mathfrak{g}$-Modul U. $M(\mathfrak{g})$ heißt *Schur-Multiplikator* von $\mathfrak{g}$. Für einen lokalen oder globalen Zahlkörper k bezeichne $\bar{k}$ einen algebraischen Abschluß von k und $G_k = G(\bar{k}/k)$ sei die absolute Galoisgruppe von k. Sei $G = G(K/k)$ eine endliche Faktorgruppe von G_k. Wir setzen $G_K = G(\bar{k}/K)$. Es sei G_K^{ab} die Galoisgruppe der maximalen in $\bar{k}$ enthaltenen abelschen Erweiterung von K. Schließlich bezeichnen wir mit C_K die multiplikative Gruppe K^* von K im Lokalen bzw. die Idealklassengruppe von K im Globalen.

3. Die exakte Hochschild-Serre Sequenz

Sei k lokal oder global. Dann gilt

(3.1) $\quad M(G_k) = 1,$

vgl. z.B. [38], § 6. Die exakte Hochschild-Serre Sequenz [18], Th. 2, S. 129, liefert daher die folgende exakte Sequenz

(3.2) $\quad 1 \longrightarrow \hat{G} \xrightarrow{\text{inf}} \hat{G}_k \xrightarrow{\text{res}} \hat{G}_K^G \xrightarrow{\tau} M(G) \longrightarrow 1;$

hierbei bezeichnet τ diejenige Transgressionsabbildung, die zur Kohomologieklasse $v = \alpha^*(u) \in H^2(G,G_K^{ab})$ gehört, wobei $u \in H^2(G,C_K)$ die kanonische Klasse und $\alpha^*: H^2(G,C_K) \to H^2(G,G_K^{ab})$ die durch das universelle G-equivariante Artinsymbol $\alpha: C_K \to G_K^{ab}$ induzierte Abbildung bezeichnet, vgl. [2], S. 222 ff.

4. Der Kern der Lokalisierungsabbildung

Sei k global. Für jede Primstelle v von k sei $\bar{v}$ eine Fortsetzung von v auf $\bar{k}$ und $G_{\bar{v}}$ sei die Zerlegungsgruppe von $\bar{v}_{|K}$. Mit $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(K/k)$ bezeichnen wir den Kern der Lokalisierungsabbildung

(4.1) $\quad M(G) \to \coprod_{v} M(G_{\bar{v}}),$

wobei v alle Primstellen von k durchläuft. Man beachte, daß fast alle v in K unverzweigt, daher fast alle Zerlegungsgruppen $G_{\bar{v}}$ zyklisch und somit fast alle lokalen Schur-Multiplikatoren $M(G_{\bar{v}})$ trivial sind. Nach Tate [44], S. 198, gilt

(4.2) $\quad \mathfrak{H}=\mathfrak{H}(K/k)$ *ist dual zum Zahlknoten* $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(K/k)$ *von* K/k.

Der *Zahlknoten* $\mathfrak{K}$ ist wie folgt definiert, vgl. Scholz [34], S. 101:

$$\mathfrak{K}=\frac{\{a \in k^* \mid a \text{ ist lokal überall Norm in } K/k\}}{\{a \in k^* \mid a \text{ ist globale Norm in } K/k\}}.$$

(4.2) ist neuerdings zum wichtigen Hilfsmittel bei der Klassifikation der Galoiserweiterungen K/k, für die der Hassesche Normensatz gilt, geworden, vgl. [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [32].

5. Geschlechter von zentralen Erweiterungen

Sei k lokal oder global. Eine endliche Galoiserweiterung L von K/k (das ist eine K umfassende endliche Galoiserweiterung von k) heißt *zentral,* wenn G(L/K) im Zentrum von G(L/k) enthalten ist. Zwei zentrale Erweiterungen L, L' von K/k heißen vom gleichen *Geschlecht,* falls eine endliche abelsche Erweiterung k_0/k existiert, so daß $L \cdot k_0 = L' \cdot k_0$.

(5.1) *Die Geschlechter von zentralen Erweiterungen von* K/k *entsprechen bijektiv den Untergruppen des Schur-Multiplikators* M(G).

Diese Bijektion β entsteht folgendermaßen: Zu jeder Untergruppe $\mathfrak{A} \leqq M(G)$ existiert nach (3.2) eine Teilmenge $X \subset \hat{G}_K^G$, so daß $\tau(X)=\mathfrak{A}$. Sei L der Fixkörper zu $\cap \operatorname{Ker}\chi$, $\chi \in X$. Das zu L gehörige Geschlecht [L] ist nach (3.2) durch $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt. Setze $\beta(\mathfrak{A}) := [L]$. Die Umkehrabbildung γ von β: Sei [L] ein Geschlecht zentraler Erweiterungen von K/k. Setze $\gamma([L]) := \tau(G(L/K)\hat{\ })$, vgl. (3.2).

Sei k global. Jedem Geschlecht von zentralen Erweiterungen [L] von K/k sind dann die lokalen Geschlechter $[L_{\bar{v}}]$ von zentralen Erweiterungen von $K_{\bar{v}}/k_v$ zugeordnet. Aus (4.2) und (5.1) folgt

(5.2) *Gilt in* K/k *der Hassesche Normensatz, dann sind zwei Geschlechter von zentralen Erweiterungen von* K/k *genau dann gleich, wenn an allen Primstellen* v *von* k, *die in* K *verzweigen, die entsprechenden lokalen Geschlechter gleich sind.*

Sei k lokal oder global. Für alle $f \in M(G)$ definieren wir den Index l(f) von f aufgrund von (3.2) wie folgt.

$$l(f) := \operatorname{Min}\{G_K : \operatorname{Ker}\chi \mid \chi \in \hat{G}_K^G,\ \tau(\chi)=f\}.$$

(5.3) *Sei* k *lokal. Für alle* $f \in M(G)$ *gilt dann* $l(f) < m \cdot m'$, *wobei* m *die Ordnung von* f *ist und* m' *die maximale Ordnung einer in* k *enthaltenen Einheitswurzel von* m-*Potenzordnung bezeichnet.*

Sei k global, sei $f \in M(G)$ und sei $S = S(f)$ die Menge der Primstellen v von k, für die die Einschränkung $f_v \in M(G_v)$ nicht trivial ist.

(5.4) *Sei* k *global. Für alle* $f \in M(G)$ *gilt dann*

$$l(f) \leqq \underset{v \in S}{\mathrm{kgV}}(l(f_v)) \cdot (K:k) \leqq \underset{v \in S}{\mathrm{kgV}}(m_v \cdot m'_v) \cdot (K:k),$$

wobei m_v *die Ordnung von* f_v *bezeichnet und* m'_v *die gleiche Bedeutung hat wie* m' *in* (5.3).

Aus (5.3) und (5.4) ergibt sich die folgende Aussage.

(5.5) *Sei* k *lokal oder global und sei* $\mathfrak{A} \leqq M(G)$. *Dann läßt sich jedes Geschlecht zentraler Erweiterungen von* K/k, *das im Sinne von* (5.1) *zu* $\mathfrak{A}$ *gehört, durch eine zentrale Erweiterung* L *von* K/k *repräsentieren, so daß die folgenden Gradabschätzungen richtig sind: Im Lokalen*

$$L:K \leqq (e \cdot e')^{\mathrm{Rank}(\mathfrak{A})},$$

wobei $e = \exp \mathfrak{A}$ *und* e' = *maximale Ordnung einer in* k *enthaltenen Einheitswurzel von* e-*Potenzordnung. Im Globalen*

$$L:K \leqq [\underset{v \in S}{\mathrm{kgV}}(e_v \cdot e'_v) \cdot (K:k)]^{\mathrm{Rank}(\mathfrak{A})},$$

wobei S *die Menge der Primstellen* v *von* k *bezeichnet, für die die Einschränkung* $\mathfrak{A}_v \leqq M(G_v)$ *nicht trivial und* $e_v = \exp \mathfrak{A}_v$, e'_v *wie oben.*

(5.1) bis (5.5) werden in [30] bewiesen.

Für eine klassenkörpertheoretische Kennzeichnung zentraler Erweiterungen, wie sie von A. Scholz [34], [35] eingeleitet wurde, ist die Frage nach Repräsentanten von Geschlechtern zentraler Erweiterungen mit einem „kanonischen" Führer von großer Bedeutung. Die weitreichendsten Ergebnisse in dieser Richtung finden sich in [7]. [39], [40], [41]. Eine systematische Darstellung findet man in [17]. Vollauf befriedigende Ergebnisse sind im Globalen aber nur im Spezialfall $k = \mathbb{Q}$, $K/\mathbb{Q}$ abelsch, bekannt. Das Hauptresultat lautet wie folgt, vgl. z. B. [17], S. 80.

(5.6) *Sei* $K/\mathbb{Q}$ *abelsch. Abgesehen von dem Fall, daß* 2 *in* K *verzweigt ist, wenn* $K:\mathbb{Q}$ *gerade ist, läßt sich jedes Geschlecht zentraler Erweiterungen von* $K/\mathbb{Q}$ *durch eine zentrale Erweiterung* L *von* $K/\mathbb{Q}$ *repräsentieren, die in demjenigen zentralen Klassenkörper von* K *enthalten ist, der zum sogenannten Geschlechtermodul* g_K *von* K *gehört:*

$$g_K = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\varphi_{\mathfrak{p}}(i_p - 1) + 1},$$

wobei $\mathfrak{p}$ *alle endlichen und unendlichen Primstellen von* K *durchläuft,* $\varphi_{\mathfrak{p}}$ *die sogenannte Hassefunktion bezeichnet, vgl.* [37], IV, § 3, *und* $\prod_p p^{i}$, p *Primzahl oder unendliche Primstelle, die Zerlegung des Führers von* $K/\mathbb{Q}$ *in Primstellenpotenzen ist.*

6. Auflösung zahlentheoretischer Knoten

Sei k global.

(6.1) *Diejenigen zentralen Erweiterungen* L *von* K/k, *die im Sinne von* (5.1) *zum Kern* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(K/k)$ *der Lokalisierungsabbildung* (4.1) *gehören, lassen sich durch die folgende Auflösungseigenschaft charakterisieren. Ein Element in* k^*, *welches lokal überall Norm in* L/k *ist, ist globale Norm in* K/k.

(6.1) kann als eine Verallgemeinerung des Hasseschen Normensatzes gedeutet werden; denn wenn K/k zyklisch ist, dann ist M(G) und damit auch $\mathfrak{H}$ trivial. $\mathfrak{H}$ läßt sich dann im Sinne von (5.1) durch K repräsentieren, und die in (6.1) beschriebene Auflösungseigenschaft wird zur Aussage des Hasseschen Normensatzes. Zum Beweis von (6.1) vgl. [26], [28].

(6.2) *Das zu* $\mathfrak{H}(K/k)$ *gehörige Geschlecht läßt sich durch eine zentrale Erweiterung* L *von* K/k *repräsentieren, so daß*

$$L:K \leqq (K:k)^{\mathrm{Rank}(\mathfrak{H})}.$$

(6.3) *Sei* $k = \mathbb{Q}$. *Das zu* $\mathfrak{H}(K/\mathbb{Q})$ *gehörige Geschlecht läßt sich durch den zentralen engeren Hilbertschen Klassenkörper* H_K^+ *von* K *repräsentieren.*

(6.2) folgt aus (5.5). (6.3) führt ins Zentrum der klassischen Geschlechtertheorie [34], [35], [6], [25], [8], [27], [20], [22], II. Ein kurzer Beweis von (6.3) findet sich in [29]. In Spezialfällen läßt sich die in (6.2) gegebene Abschätzung verbessern, vgl. dazu [42].

7. Geschlechter von Galoisdarstellungen

Sei k lokal oder global. Sei D eine (komplexe, stetige, endlichdimensionale) Darstellung von G_k, d. h. D ist ein Homomorphismus $D: G_k \to GL(n,\mathbb{C})$, so daß G_k: Ker $D < \infty$. Zwei Darstellungen D_1, D_2 von G_k heißen vom gleichen *Geschlecht*, falls ein $\lambda \in \hat{G}_k$ existiert, so daß D_2 ähnlich zu $\lambda \otimes D_1$ ist. [D] sei das Geschlecht der Darstellung $D: G_k \to GL(n,\mathbb{C})$. Der Index l([D]) von D ist wie folgt definiert.

$$l([D]) := \mathrm{Min}\,\{G_k : \mathrm{Ker}\, D' \mid D' \in [D]\}.$$

D definiert eine projektive Darstellung

$$\bar{D}: G_k \xrightarrow{D} GL(n,\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} PGL(n,\mathbb{C}),$$

deren Äquivalenzklasse durch [D] eindeutig bestimmt ist. Sei $G := \bar{D}(G_k)$. Die exakte Sequenz $1 \to \mathbb{C}^* \to GL(n,\mathbb{C}) \to PGL(n,\mathbb{C}) \to 1$ definiert einen Verbindungshomomorphismus δ: $\mathrm{Hom}(G, PGL(n,\mathbb{C})) \to H^2(G,\mathbb{C}^*) \cong M(G)$. Setze $f := \delta(\bar{D})$. f hängt nur von [D] ab. Es gilt

(7.1) $\quad l([D]) = l(f) \cdot |G|.$

Vom Standpunkt der Theorie der Artinschen L-Reihen [1] ist es vernünftig, *primitive* Darstellungen von G_k zu untersuchen; das sind solche, die irreduzibel und nicht echt induziert sind. Ist $\lambda \in \hat{G}_k$, so ist mit D nach dem Frobeniusschen Reziprozitätsgesetz auch $\lambda \otimes D$ primitiv.

Sei nun D primitiv, sei $H = D(G_k)$, $G = \bar{D}(G_k)$. Als endliche Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ enthält H nach einem wohlbekannten Resultat von C. Jordan, vgl. z. B. [5], (36.13), S. 258, einen abelschen Normalteiler A, so daß $H:A \leqq t(n)$, wobei t(n) eine nur vom Grad n von D abhängige Zahl bezeichnet. Wegen der Primitivität von D ist A nach der Cliffordschen Theorie [5], § 49, im Zentrum von H enthalten. Das Zentrum von H stimmt aber nach dem Schurschen Lemma mit dem Kern der durch $\pi: GL(n,\mathbb{C}) \to PGL(n,\mathbb{C})$ vermittelten Abbildung $H \to G$ überein. Deshalb gilt

$$|G| \leqq t(n).$$

Beachtet man noch, daß die Ordnung von f nach I. Schur den Grad n von $\bar{D}$ teilt, so läßt sich aus (5.3) und (7.1) der folgende Satz ableiten.

(7.2) *Sei* k *lokal. Ist* $D: G_k \to GL(n,\mathbb{C})$ *eine primitive Darstellung, so gilt* $l([D]) \leqq T(n,k)$, *wobei* T(n,k) *eine nur von* n *und* k *abhängige Zahl bezeichnet. Insbesondere gibt es nur endlich viele Geschlechter primitiver Darstellungen von* G_k *von gegebenem Grad.*

Die Endlichkeitsaussage ergibt sich zusammen mit der Abschätzung aus der Tatsache, daß nur endlich viele Erweiterungen von k von festem Grad existieren, vgl. [24], Prop. 14, S. 54.

Sei k global. [D] heißt unverzweigt außerhalb einer endlichen Primstellenmenge S von k, wenn die Erweiterung K/k, $\bar{D}(G_k) = G(K/k)$, außerhalb S unverzweigt ist. Aus (5.4) und (7.1) läßt sich der folgende Satz ableiten.

(7.3) *Sei* k *global. Ist* $D: G_k \to GL(n,\mathbb{C})$ *eine primitive Darstellung, deren Geschlecht* [D] *außerhalb einer endlichen Primstellenmenge* S *von* k *unverzweigt ist, dann gilt* $l([D]) \leqq T(n,k,S)$, *wobei* T(n,k,S) *eine nur von* n, k *und* S *abhängige Zahl bezeichnet. Insbesondere gibt es nur endlich viele Geschlechter primitiver Darstellungen von* G_k *von vorgegebenem Grad, die außerhalb einer vorgegebenen endlichen Primstellenmenge von* k *unverzweigt sind.*

Die Endlichkeitsaussage ergibt sich zusammen mit der Abschätzung aus einem klassischen Resultat von Minkowski, welches besagt, daß es nur endlich viele Erweiterungen von k von festem Grad gibt, die außerhalb einer endlichen Primstellenmenge von k unverzweigt sind.

Geschlechter von Galoisdarstellungen werden ausführlicher in [31] behandelt.

8. Schlußbemerkungen

Einige Aspekte sind unerwähnt geblieben: insbesondere die erwiesenermaßen nützliche Rolle des Schur-Multiplikators bei der Lösung des Klassenkörperturmproblems, vgl. dazu [33], und die bisher eher ungewisse Rolle des Schur-Multiplikators im Zusammenhang mit der sogenannten Leopoldt-Vermutung, vgl. dazu [16], Abschnitt 4.4.

Die Literaturliste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Literaturverzeichnis

[1] E. Artin: Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren. In: Ges. Abh., 165–179. The collected papers of E. Artin, edited by S. Lang and J. Tate, Addison Wesley, Reading, Mass., 1965.

[2] E. Artin, J. Tate: Class field theory. W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1967.

[3] J. Buhler: Icosahedral Galois representations, LNM 654. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[4] J. W. S Cassels, A. Fröhlich: Algebraic number theory. Academic Press, New York, 1967.

[5] C. W. Curtis, I. Reiner: Representation theory of finite groups and associative algebras. Interscience Publishers, New York, 1962.

[6] A. Fröhlich: The genus fields and genus group in finite number fields I, II. Mathematika, 6, 1959, 40–46, 142–146.

[7] A. Fröhlich: On fields of class two. Proc. London Math. Soc., 4, 1954, 235–256.

[8] Y. Furuta: The genus field and genus number in algebraic number fields. Nagoya Math. J., 29, 1967, 281–285.

[9] D. A. Garbanati: The Hasse norm theorem for non cyclic extensions of the rationals. Proc. London Math. Soc., 37, 1978, 143–164.

[10] D. A. Garbanati: The Hasse norm theorem for l-extensions of the rationals. In: Number Theory and Algebra, edited by H. Zassenhaus, Academic Press, New York, 1977, 77–90.

[11] F. Gerth: The Hasse norm principle for abelian extensions of number fields. Bull. AMS, 83, 1977, 264–266.

[12] F. Gerth: The Hasse norm principle in cyclotomic number fields. JRAM (Crelle), 303/304, 1978, 249–252.

[13] S. Gurak: On the Hasse norm principle. JRAM (Crelle), 299/300, 1978, 16–27.

[14] S. Gurak: The Hasse norm principle in non abelian extensions. JRAM (Crelle), 303/304, 1978, 314–318.

[15] S. Gurak: The Hasse norm principle in a compositum of radical extensions. J. London Math. Soc., 22, 1980, 385–397.

[16] K. Haberland: Galois cohomology of algebraic number fields. VEB Deutscher Verlag der der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[17] F. P. Heider: Zur Theorie der zahlentheoretischen Knoten. Dissertation, Köln, 1978.

[18] G. Hochschild, J. P. Serre: Cohomology of group extensions. Trans. AMS, 74, 1953, 110–134.

[19] B. Huppert: Endliche Gruppen I. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[20] M. Ishida: The Genus Fields of Algebraic Number Fields, LNM 555. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[21] S. Iyanaga: Zur Theorie der Geschlechtermoduln. JRAM (Crelle), 171, 1934, 12–18.

[22] W. Jehne: On knots in algebraic number theory. JRAM (Crelle), 311/312, 1979, 215–254.

[23] L. V. Kuzmin: Homology of profinite groups, Schur multiplier and class field theory. Izv. Akad. Nauk. SSSR, 33, 1969, 1220–1254.

[24] S. Lang: Algebraic number theory. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.

[25] H. W. Leopoldt: Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. Math. Nachr., 9, 1953, 351–362.

[26] F. Lorenz: Über eine Verallgemeinerung des Hasseschen Normensatzes. Math. Zeitschrift, 173, 1980, 203–210.

[27] K. Masuda: An application of the generalized norm residue symbol. Proc. AMS, 10, 1959, 245–252.

[28] H. Opolka: Zur Auflösung zahlentheoretischer Knoten. Math. Zeitschrift, 173, 1980, 95–103.

[29] H. Opolka: Solution of the number knot of small degree. Erscheint in Proc. AMS.

[30] H. Opolka: Geschlechter von zentralen Erweiterungen. Archiv d. Math., 37, 1981, 418–424.

[31] H. Opolka: Der Liftungsindex primitiver Galoisdarstellungen. Erscheint im J. of Algebra.
[32] M.J. Razar: Central and genus class fields and the Hasse norm theorem. Compositio Math., 35, 1977, 281–298.
[33] P. Roquette: On class field towers. In: [4], 231–249.
[34] A. Scholz: Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht abelscher Körpererweiterungen I. JRAM (Crelle), 175, 1936, 100–107.
[35] A. Scholz: Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht abelscher Körpererweiterungen II. JRAM (Crelle), 182, 1940, 217–234.
[36] I. Schur: Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. In: Ges. Abh., 86–116. – I. Schur: Ges. Abh., herausgegeben von A. Brauer und H. Rohrbach, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
[37] J.P. Serre: Corps locaux. Hermann, Paris, 1962.
[38] J.P. Serre: Modular forms of weight one and Galois representations. In: Algebraic number fields, edited by A. Fröhlich, Academic Press, London, 1977.
[39] S. Shirai: On the central class field mod m of Galois extensions of an algebraic number field. Nagoya Math. J., 71, 1978, 61–85.
[40] S. Shirai: On Galois groups of class two extensions over the rational number field. Nagoya Math. J. 75, 1979, 121–132.
[41] S. Shirai: On the central ideal class group of cyclotomic fields. Nagoya Math. J., 75, 1979, 133–144.
[42] G. Steinke: Dissertation. Univ. Münster, in Vorbereitung.
[43] J. Tate: Duality theorems in Galois cohomology over number fields. Proc. of the Int. Congress of Math., Stockholm, 1962.
[44] J. Tate: Global Class Field Theory. In: [4], 163–203.